课程的性质与任务

高等数学是计算机科学与技术专业的一门重要的基础理论课，也是该专业的核心课程。通过本课程的学习，要使学生获得“向量代数”与“空间解析几何”，“微积分”，“常微分方程与无穷级数”等方面的基本概念、基本理论与基本运算；同时要通过各个教学环节逐步培养学生的抽象概括能力、逻辑推理能力、空间想象能力和自学能力。在传授知识的同时，要着眼于提高学生的数学素质，培养学生用数学的方法去解决实际问题的意识、兴趣和能力。

第一章　函数与极限

教学目的与要求　　18 学时

1．理解函数的概念，掌握函数的表示方法，并会建立简单应用问题中的函数关系式。

2．了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性。

3．理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念。

4．掌握基本初等函数的性质及其图形。

5．理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系。

6．掌握极限的性质及四则运算法则。

7．了解极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法。

8．理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限。

9．理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型。

10．了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质。

初等数学是以不变的量（常量）为研究对象的，而高等数学则是以变动的量（变量）为研究对象的。所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，研究函数的基本方法是极限方法。

第一节　映射与函数

一、集合

1．集合概念

具有某种特定性质的事物的总体叫做集合。组成这个集合的事物称为该集合的元素。

一个集合，若它只含有有限个元素，则称为**有限集**；不是有限集的集合称为**无限集**。

集合的表示方法：用 A，B，C，D 表示集合；用 a，b，c，d 表示集合中的元素。

(1) 列举法：把集合的全体元素一一列举出来。

例如 A={a, b, c, d, e, f, g}

(2) 描述法：若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成, 则 M 可表示为 M={x | x 具有性质 P }　　　例如 M={(x, y)| x, y 为实数, $x^2+y^2=1$}

元素为实数的集合称为数集。常见的数集：N，Z，Q，R，N^+

N — 全体正自然数集，Z — 全体整数的集，Q — 全体有理数的集，

R — 全体实数的集，　N^+ — 全体正自然数集。

以后不特别说明的情况下考虑的集合均为数集。

元素与集合的关系：$a\notin A$　　$a\in A$

集合与集合的关系：　A、B 是两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subset B$。注：$A\subset A$ 。

如果集合 A 与集合 B 互为子集，则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$

若作 $A\subset B$ 且 $A\neq B$ 则称 A 是 B 的**真子集**。

一个特殊集合：空集 ϕ，　$\phi\subset A$ 。

2．集合的运算

并集 $A \cup B$ ： $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}=\{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{A}$或$x \in B\}$

交集 $A \cap B$ ： $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}=\{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{A}$且$x \in B\}$

差集　$A \setminus B$：　$A \setminus B=\{x \mid x \in A$且$x \notin B\}$

全集 I 或 E

A 的补集（余集）$A^{C}=\overline{A}=I \setminus A$

集合的并、交、余运算满足下列法则：

(1) 交换律：$A \cup B=B \cup A$　　$A \cap B=B \cap A$

(2) 结合律：$(A \cup B) \cup C=A \cup(B \cup C)$　　$(A \cap B) \cap C=A \cap(B \cap C)$

(3) 分配律：$(A \cup B) \cap C=(A \cap C) \cup(B \cap C)$　　$(A \cap B) \cup C=(A \cup C) \cap(B \cup C)$

(4) 对偶律：$(A \cup B)^{c}=A^{c} \bigcap B^{c}$　　$(A \cap B)^{c}=A^{c} \cup B^{c}$

笛卡儿积（直积）：$\mathrm{A} \times \mathrm{B}=\{(x, y) \mid x \in A$且$y \in B\}$

3．区间和邻域

开区间：(a,b)　　闭区间：$[a,b]$　　半开半闭区间：$(a,b]$　$[a,b)$

有限区间　　无限区间，如：$(-\infty, b]=\{x \mid x \leq b\},(a,+\infty)=\{x \mid a<x\}$

a 的邻域：$U(a)$　　a 的 δ 邻域：$U(a, \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x \mid |x-a|<\delta\}$

a ：邻域的中心　　δ：邻域的半径

去心邻域　$\mathring{U}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$

左邻域：$(a-\delta, a)$　　右邻域$(a, a+\delta)$

二、映射

1．映射概念

定义　设X，Y是两个非空集合，如果存在一个法则f，使得对X中的每一个元素x，按法则f，在Y中有唯一确定的元素y与之对应，则称f为从X到Y的**映射**，记作　f: $X \to Y$

其中y　称为元素x的像，并记作$f(x)$，即　$y = f(x)$　。　x称为y的一个原像。

注意：1）映射三要素：集合X；集合Y；对应法则f

2）每个X有唯一的像；每个Y的原像不唯一

3) 单射（元素不同则像不同）、满射（Y中元素都是像）、

双射（既是单射，又是满射，也称一一映射）

2．逆映射f^{-1}、复合映射$f \circ g$

三、函数

1．函数的概念

定义：设数集$D \subset R$，则称映射f：$D \to R$为定义在D上的函数，记为$y = f(x),\quad x \in D$

概念：自变量、因变量、定义域、值域、函数值$f(x_0)$、$f\big|_{x=x_o}$

自然定义域；单值函数；多值函数、单值分支

注：1）函数的定义域未必是连续的区间。如$y = \dfrac{1}{x}$、$y = x!$

2）函数相等$\Longleftrightarrow$定义域与对应法则都相同。如　$y = x - 1$与$y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$不同

3）分段函数：在定义域的不同范围内用不同式子表示的函数（不论分几段，总是一个函数）。如　$y = f(x) = \begin{cases} 3x, & x \in (1, 10] \\ 2x, & x \in (10, 15] \end{cases}$

二、常量与变量

在自然科学中，我们会遇到各种不同的量，然而在观察这些量时，发现有着非常不同的状态，有的量在过程中不起变化，保持一定的数值，此量称为常量；又有些量有变化，可取各种不同的数值，这种量称为变量。

三、函数

1．函数的概念

定义：设x和y为两个变量，D为一个给定的数集，如果对每一个$x\in D$，按照一定的法则f变量y总有确定的数值与之对应，就称y为x的函数，记为$y=f(x)$.数集D称为该函数的定义域，x叫做自变量，y叫做因变量。

当x取数值$x_0\in D$时，依法则f的对应值称为函数$y=f(x)$在$x=x_0$时的函数值。所有函数值组成的集合$W=\{y|y=f(x),x\in D\}$称为函数$y=f(x)$的值域。

函数的表示法有三种：解析法、图象法、列表法。

注： 1）函数的定义域未必是连续的区间。如$y=\dfrac{1}{x}$、$y=x!$

2）函数相等$\Longleftrightarrow$定义域与对应法则都相同。如 $y=x-1$与$y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$不同

3）分段函数：在定义域的不同范围内用不同式子表示的函数（不论分几段，总是一个函数）。

如 $y=f(x)=\begin{cases}3x, & x\in(1,10]\\ 2x, & x\in(10,15]\end{cases}$，$x=10$称为“分段点”，定义域为(1,15]。

符号函数$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1,x>0\\0,x=0\\-1,x<0\end{cases}$，　取整函数$y=[x]$，[3.1]=3，[-3.1]= -4。

4）函数通常还可用$y=g(x),y=F(x),s=u(t)$等表示。

例： 1)　y ＝2

2)　y ＝$|x|$

2．函数的几种特性

1）函数的有界性 (上界、下界；有界、无界)

设 $y = f(x)$ 在 D 上有定义，若对 $\forall x \in D,\ \exists M > 0$，使得：$\left|f(x)\right| \le M$ ，就称 $f(x)$ 在 D 上有界，否则称为无界（对 $\forall M > 0$，总 $\exists x_0 \in D$，使得 $\left|f(x_0)\right| > M$ ）。

若 $\forall x \in D$，$\exists M$，使得 $f(x) \le M$（$f(x) \ge M$ ），就称 $f(x)$ 在 D 上有上(下)界。

有界的充要条件：既有上界又有下界。

$f(x) = \dfrac{1}{x}$，在[1，$+\infty$]，有界；在(0, 1)无界。

2) 函数的单调性 （单增、单减）在 x_1、x_2 点比较函数值 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小（注：与区间有关）

3) 函数的奇偶性 (定义域对称、$f(x)$ 与 $f(-x)$ 关系决定)

图形特点 (关于原点、Y 轴对称)

两偶函数和为偶函数；两奇函数和为奇函数；两偶函数的积为偶函数；

两奇函数的积也为偶函数；一奇一偶的积为奇函数。

4)函数的周期性 (定义域中成立：$f(x + l) = f(x)$)

狄里克雷函数 $y = D(x) = \begin{cases} 1, x\text{为有理数} \\ 0, x\text{为无理数} \end{cases}$，为周期函数，任何正有理数都是周期，但没有最小正周期。

3．反函数与复合函数

反函数：函数 $f : D \to f(D)$ 是单射，则有逆映射 $f^{-1}(y) = x$，称此映射 f^{-1} 为 f 函数的反函数。

设 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，因此，对 $\forall y \in W$，都有唯一的 $x \in D$，使得 $f(x) = y$，若将 y 当作自变量，x 当作因变量，按函数的概念，就得到一新函数 $x = \varphi(y)$，称之为函数 $y = f(x)$ 的反函数，而 $f(x)$ 叫做直接函数。

函数与反函数的图像关 $y = x$ 于对称。

复合函数：（函数$u=g(y)$定义域为 D_1，函数$y=f(x)$在 D 上有定义、且$f(D)\subset D_1$。则$u=g(f(x))=g\circ f(x)$为复合函数。(注意：构成条件) ）

设$y=f(u)$，定义域为D_1，$u=\varphi(x)$，定义域为D_2，值域为W_2，且$W_2\subset D_1$，

这样对于$\forall x\in D_2$，由$u=\varphi(x)$可算出函数值$u\in W_2\subset D_1$，所以$u\in D_1$，

由$y=f(u)$又可算出其函数值y，因此对于$\forall x\in D_2$，有确定的值y与之对应，从而得一个以x为自变量，y为因变量的函数，我们称之为以$y=f(u)$为外函数，$u=\varphi(x)$为内函数复合成的复合函数，记为$y=f[\varphi(x)]$，其中u为中间变量。

复合函数：$y=f(u)$，$u=\varphi(x)\Rightarrow y=f[\varphi(x)]$

例　$y=\sin^2 x$就是$y=u^2$和$u=\sin x$复合而成；

$y=\cos x^2$就是$y=\cos u$和$u=x^2$复合而成。

注 1：并非任何两函数都可以复合的，

例如：$y=\arcsin u$和$u=2+x^2$不能复合；　$y=\sqrt{u}$和$u=-1-x^2$也不能复合。

注 2：复合可推广到三个或更多的函数上去，如：

$y=\tan(\ln x)^2$就是$y=\tan u, u=v^2, v=\ln x$复合成的。

4．函数的运算

和、差、积、商(注：只有具备公共定义域的函数才能运算)

5．初等函数

1) 幂函数：$y=x^a$

2) 指数函数：$y=a^x$

3) 对数函数：$y=\log_a(x)$

4) 三角函数：$y=\sin(x), y=\cos(x), y=\tan(x), y=\cot(x)$

5) 反三角函数：$y=\arcsin(x)$，$y=\arccos(x)$

$$y=\arctan(x),\qquad y=arc\cot(x)$$

以上五种函数为基本初等函数。

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合后所得到的能用一个解析式子表示的函数，称为初等函数。

$y=\sqrt{1+x},\ y=\sqrt{1-2^x},\ y=\sin^2 x,\ y=\tan(\ln x)^2$ 等都是初等函数。

本教材讨论的主要都是初等函数。

6) 双曲函数和反双曲函数

双曲正弦：$y=shx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ $\quad x\in(-\infty,+\infty)$

双曲余弦：$y=chx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $\quad x\in(-\infty,+\infty)$

双曲正切：$y=thx=\dfrac{shx}{chx}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $\quad x\in(-\infty,+\infty)$

反双曲正弦：$y=arshx=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ $\quad x\in(-\infty,+\infty)$

反双曲余弦：$y=archx=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ $\quad x\in[1,+\infty)$

反双曲正切：$y=arthx=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ $\quad x\in(-1,1)$

由于这类以后用得较少，只要掌握上面的内容就行了，其它的此处不细讲了。

双曲函数公式

$$sh(x+y)=shx\cdot chy+chx\cdot shy$$
$$sh(x-y)=shx\cdot chy-chx\cdot shy$$
$$ch(x+y)=chx\cdot chy+shx\cdot shy$$
$$ch(x-y)=chx\cdot chy-shx\cdot shy$$

作业： P21. （习题 1-1） 6（3，4）、7（1）、18

（同步练习册练习一）