第十节 闭区间上连续函数的性质

一、 有界性与最大值最小值的定理

定义：设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若 $\exists x_0 \in I$ ，使得对 $\forall x \in I$ ，有 $f(x) \le f(x_0)$ （$f(x) \ge f(x_0)$），就称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的最大值（最小值），称 x_0 为最大值点（最小值点）。

注：(1) 显然，最值是唯一的，而最值点不一定唯一，如： $y=\sin x$；

(2) 最值点必在 I 内；

(3) 若在 I 上，最大值与最小值相等，那么，在 I 上，$f(x)$ 为常数；

(4) 一般而言，最值未必存在，如：$f(x)=x$ 在 $(-1,1)$ 上既无最大值，也无最小值；$g(x)=x^2$ 在 $(-1,1)$ 上有最小值，但无最大值；那么，究竟何时同时有最大值与最小值呢？

定理 1（最大值与最小值定理）：闭区间上的连续函数一定有最大值和最小值。

注：(1) “闭区间”与“连续”二条件缺一不可；

(2) $f(x)$ 若在 I 上取得最大、最小值，$f(x)$ 未必连续，I 也未必为闭区间。

反例 1： $y=x \qquad x \in (-1,1)$

反例 2： $$y=\begin{cases} 1-x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1-x & x<0 \end{cases} \qquad x \in [-1,1]$$

定理 2（有界性定理）：闭区间上的连续函数在该区间一定有界。

二、 介值定理

定义：若 $f(x_0)=0$，就称 x_0 为 $f(x)$ 的零点（或 $f(x)=0$ 的根）。

定理 3（零点定理）：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么，在开区间 (a,b) 上， 至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$，即 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有一个零点。

注：（1）本定理对判断零点的位置很有用处，但不能求出零点；

（2）从几何上看 $(a,f(a))$ 与 $(b,f(b))$ 在 x 轴的上下两侧，由于 $f(x)$ 连续，显然，在 (a,b) 上，$f(x)$ 的图象与 x 轴至少相交一次；

（3）若 $f(a)\cdot f(b)>0$，则不能判定没有零点，须进一步考查。

定理 4（介值定理）：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，那么，对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意常数 C，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C,(a<\xi<b)$。

注：（1）若 $f(x)\in C_{[a,b]}$，且 $f(a)<f(b)$，则：$[f(a),f(b)]\subset[m,M]$；

（2）由 $f(\xi)=C$ 说明 ξ 是 $f(x)-C$ 的零点；

（3）几何图象上看，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=C$ 在 (a,b) 上至少有一个交点。

推论：设在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 有最大值 M 和最小值 m，那么，对于 $\forall C\in(m,M)$，必 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=C$。

例 1 验证方程 $4x=2^x$ 有一根在 0 与 $\frac{1}{2}$ 之间。

解 令 $f(x)=4x-2^x \quad\Rightarrow\quad f(0)=-1<0$，

$$f(\frac{1}{2})=4\times\frac{1}{2}-2^{\frac{1}{2}}=2-\sqrt{2}>0$$

又 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上是连续的，故由零点定理，知：

$\exists\xi\in(0,\frac{1}{2})$，使得 $f(\xi)=0$，即 $4\xi=2^{\xi}$，

所以，方程 $4x=2^x$ 有一根在 0 与 $\frac{1}{2}$ 之间。

例 2　证明方程 $x = a\sin x + b$，其中 $a > 0,\ b > 0$，至少存在一个正根，并且它不超过 $a + b$。

证　令 $f(x) = x - a\sin x - b$，显然，$f(0) = -b < 0$，

又 $f(a+b) = a + b - a\sin(a+b) - b = a[1 - \sin(a+b)] \ge 0$

（i）若 $f(a+b) = 0$，即 $a + b$ 是 $f(x)$ 的零点，亦即方程 $x = a\sin x + b$ 的根，此时得证；

（ii）若 $f(a+b) \ne 0$，必有 $f(a+b) > 0$，因为 $f(x)$ 在 $[0, a+b]$ 上是连续的，所以由零点定理，至少 $\exists \xi \in (0, a+b)$，使得 $f(\xi) = 0$，即 ξ 为 $x = a\sin x + b$ 的根，所以此时也得证。

作业：　P73　1、5