第八节 函数的连续性与间断点

一、函数的连续性

连续性是函数的重要性态之一，在实际问题中普遍存在连续性问题，从图形上看，函数的图象连绵不断。在数学上，我们有：

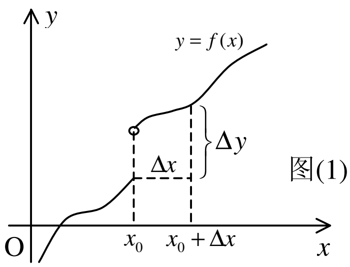
变量u由初值u_1变到终值u_2，终值u_2与初值u_1的差u_2-u_1称为u的增量，记为Δu，即$\Delta u=u_2-u_1$； Δu可正、可负、也可为零，这些取决于u_1与u_2的大小。

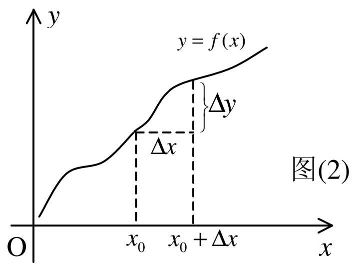
我们称$x-x_0$为自变量x在x_0点的增量，记为Δx，即$\Delta x=x-x_0$或$x=x_0+\Delta x$；相应函数值差，$f(x)-f(x_0)$称为函数$f(x)$在x_0点的增量，记为Δy，即

$\Delta y=f(x)-f(x_0)=y-y_0$，即$f(x)=f(x_0)+\Delta y$或$y=y_0+\Delta y$，

一般Δx改变，Δy也改变。当$\Delta x\to 0$时，Δy未必趋于零。

例如：当$\Delta x\to 0$时，图(1) 中的Δy不趋于零，$f(x)$在x_0处“断开”。图(2) 中的Δy趋于零，$f(x)$在x_0处“连续”。





定义　设$y=f(x)$在x_0的某邻域内有定义，若当$\Delta x\to 0$时，有$\Delta y\to 0$，即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，或$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，就称$f(x)$在$x_0$点连续。

下面再给出连续性定义的另一种形式：

当　$\Delta x\to 0\Leftrightarrow x\to x_0$

有　$\Delta y\to 0\Leftrightarrow f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\to 0\Leftrightarrow f(x)\to f(x_0)$。

等价定义 1　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，就称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点处连续。

注 1：$f(x)$ 在 x_0 点连续，不仅要求 $f(x)$ 在 x_0 点有意义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，而且要 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，即极限值等于函数值。

注 2：若 $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0-0)=f(x_0)$，就称 $f(x)$ 在 x_0 点左连续。

若 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0+0)=f(x_0)$，就称 $f(x)$ 在 x_0 点右连续。

注 3：如果 $f(x)$ 在区间 I 上的每一点处都连续，就称 $f(x)$ 在 I 上连续；并称 $f(x)$ 为 I 上的连续函数；若 I 包含端点，那么 $f(x)$ 在左端点连续是指右连续，在右端点连续是指左连续。

用"$\varepsilon-\delta$"语言连续定义也可表达如下：

等价定义 2　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，就称 $f(x)$ 在 x_0 点连续。

定理　$f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 点既左连续，又右连续。

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线。

例 1　多项式函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续的；所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，有理函数在分母不等于零的点处是连续的，即在定义域内是连续的。

例 2　证明　$y=\sin x$　在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续的。

证　设 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$。当 x 有增量 Δx 时，对应的函数增量为：

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

注意到 $\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\le 1$, 有 $|\Delta y|=|\sin(x+\Delta x)-\sin x|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|$

对 $\forall\alpha$，当 $\alpha\neq 0$ 时有 $|\sin\alpha|\le|\alpha|$，所以

$$0 \le |\Delta y| = |\sin(x+\Delta x) - \sin x| \le |\Delta x|$$

因此，当$\Delta x \to 0$时，由夹逼准则得$|\Delta y| \to 0$，这就证明了对于任意$\forall x \in (-\infty, +\infty)$是连续的。

类似可证明$y = \cos x$在$(-\infty, +\infty)$上是连续的。

例 3　证明$f(x) = |x|$ 在$x = 0$点连续。

证　$\lim\limits_{x \to 0-} |x| = \lim\limits_{x \to 0-0} (-x) = 0,\qquad \lim\limits_{x \to 0+} |x| = \lim\limits_{x \to 0+0} x = 0$，

又$f(0) = 0$，所以由定理知 $f(x) = |x|$在$x = 0$点连续。

例 4　讨论函数　$y = \begin{cases} x+2, & x \ge 0 \\ x-2, & x < 0 \end{cases}$　在$x = 0$的连续性。

解　$\lim\limits_{x \to 0-0} y = \lim\limits_{x \to 0-0} (x-2) = 0-2 = -2$，　$\lim\limits_{x \to 0+0} y = \lim\limits_{x \to 0+0} (x+2) = 0+2 = 2$

因为$-2 \ne 2$，所以该函数在$x = 0$点不连续，又因为$f(0) = 2$，所以为右连续函数。

二、函数的间断点

简单地说，若$f(x)$在x_0点不连续，就称x_0为$f(x)$的间断点，或不连续点，为方便起见，在此要求x_0的任一邻域均含有$f(x)$的定义域中非x_0的点。

间断点有下列三种情况：

（1） $f(x)$在$x = x_0$没有定义；

（2）虽在$x = x_0$有定义，但$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在；

（3）虽然$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，而且也在$x_0$点有定义，但$\lim\limits_{x \to 0} f(x) \ne f(x_0)$。

几种常见的间断点类型：

例 5　设$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$，当$x \to 0, f(x) \to \infty$，即极限不存在，所以$x = 0$为$f(x)$的间断点。因为$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$，所以$x = 0$为无穷间断点。

例 6　$y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 点无定义，且当 $x\to 0$ 时，函数值在 -1 与 $+1$ 之间无限次地振荡，而不超于某一定数，见书上图（P62 图 1-33）。

这种间断点称为振荡间断点。

另有：$f(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\in Q\\ 1 & , \quad x\notin Q\end{cases}$ ，$\forall x$ 均为振荡间断点。

例 7　$y=\frac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 点无定义，所以 $x=0$ 为其间断点，又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，所以若补充定义 $f(0)=1$，那么函数在 $x=0$ 点就连续了。故这种间断点称为可去间断点。

例 8　函数　$y=\begin{cases}x+2, & x\ge 0\\ x-2, & x<0\end{cases}$　在 $x=0$ 点不连续，但左、右极限均存在，且有不等于 $f(0)$ 的，这种间断点称为跳跃间断点。例如 $y=\operatorname{sgn}x$ 在 $x=0$ 处即为跳跃间断点。

归纳：(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$， x_0 为无穷间断点；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 震荡不存在， x_0 为震荡间断点；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\ne f(x_0)$， x_0 为可去间断点；

(4) $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)\ne\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$， x_0 为跳跃间断点。

如果 $f(x)$ 在间断点 x_0 处的左右极限都存在，就称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点，显然它包含(3)、(4)两种情况；否则就称为第二类间断点。

作业：P64　1（2）、2（1、4）、4